Μάθημα 23ο | 18/05/2018

Θεώρημα $D \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό, $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ συνεχής και $F: D \longrightarrow \mathbb{C}$ δοσμένο. Τότε είναι ισοδύναμα

(α) $F' = f$ και (β) $\forall\, \gamma$ κ. τμ C^1, $\gamma \subset D$

[από εδώ και πέρα κάθε καμπύλη γ θα εννοούμε ότι είναι κατά τμήματα C^1 και επίσης με $\gamma \subset D$ θα εννοούμε $\gamma([a,b]) \subset D$]

ισχύει $\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$

Πρόταση 2

$D \subset \mathbb{C}$ τόπος και $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ συνεχής. Τότε

$\underbrace{f \text{ ολοκληρώσιμη}}_{\exists\, F \text{ με } F' = f} \Leftarrow \forall$ κλειστή $\gamma \subset D$: $\int_\gamma f(z)dz = 0$

[Απόδειξη της Πρότασης 2 "$\Leftarrow$" Επιλέγουμε ένα σταθερό σημείο $a \in D$, θέλουμε $\forall\, z \in D$ και οποιαδήποτε γ_z με αρχή το a και τέλος το $z \in D$ την $F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta$ και δείχνουμε ότι $F' = f$]

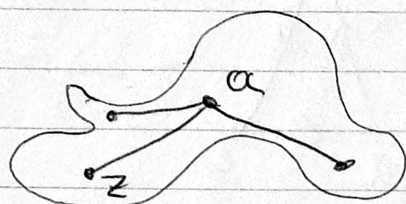
Ορισμός

$D \subset \mathbb{C}$ αστερόμορφο $\Longleftrightarrow \exists\, a \in D$, το κέντρο του D: $\forall\, z \in D$: $[a, z] \subset D$

Παρατήρηση (α) Κάθε ανοιχτό αστερόμορφο είναι τόπος

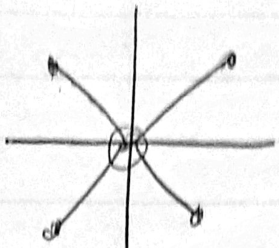
(β) Κάθε κυρτό είναι αστερόμορφο

[$D \subset \mathbb{C}$ κυρτό $\Longleftrightarrow \forall\, z, w \in D$: $[z,w] \subset D$]



γ) $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ είναι αστερόμορφο αλλά όχι κυρτό. με κέντρο οποιοδήποτε $x > 0$

(δ) $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ δεν είναι αστερόμορφο $\left(\Rightarrow \text{ούτε κυρτό}\right)$

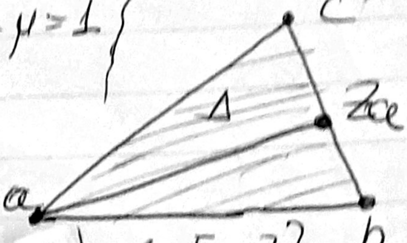


<u>Ορισμός</u>

Αν $a,b,c \in \mathbb{C}$ θα συμβολίζουμε με

$$\Delta = \Delta[a,b,c] := \{ z\in\mathbb{C} : z = a + s(b-a) + t(c-a),\ s,t \geq 0,\ s+t \leq 1 \}$$

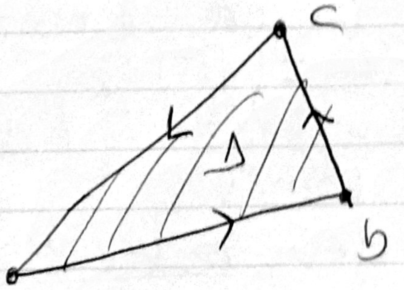
$$= \{ z\in\mathbb{C} : z = \kappa a + \lambda b + \mu c : \kappa,\lambda,\mu \geq 0,\ \kappa+\lambda+\mu = 1 \}$$



$$= \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \{ z\in\mathbb{C} : z = (1-\sigma)a + \sigma(\underbrace{(1-\alpha)b + \alpha c}_{z_\alpha}),\ \sigma\in[0,1] \}$$

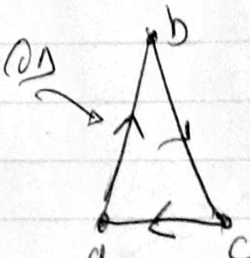
<u>συμπαγής τρίγωνο με κορυφές a,b,c και με</u>

$$\partial\Delta := [a,b] \oplus [b,c] \oplus [c,a]$$



<u>Προσοχή</u>

$\partial\Delta$ κλειστή καμπύλη με προσανατολισμό θετικό ή αρνητικό ανάλογα με τη θέση των a,b,c.



εδώ το $\partial\Delta$ έχει αρνητικό προσανατολισμό!

Πρόταση 3 (sos) (Κριτήριο ολοκλ. σε αστερόμορφο τόπους)

Έστω $D \subset \mathbb{C}$ είναι αστερόμορφο τόπος με κέντρο $a \in D$ και $f : D \to \mathbb{C}$ συνεχής με $\int_{\partial \Delta} f(z)dz = 0$

$\forall$ τρίγωνο $\Delta \subset D$ που έχει το a ως κορυφή
$\Rightarrow$ η f είναι ολοκληρώσιμη με παράγουσα την $F(z) := \int_{[a,z]} f(\zeta)\,d\zeta \quad \forall\, z \in D$

Ειδικότερα για κάθε κλειστή καμπύλη $\gamma \subset D$ ισχύει $\int_\gamma f(z)dz = 0$ (βλ. πρ.2)

Απόδ. Έστω σταθερό $c \in D$ και $D(c,\delta) \subset D$, $\delta > 0$
Τότε $\Delta[a,c,z] \subset D \quad \forall\, z \in D(c,\delta)$
Έτσι από την υπόθεση έχουμε

$$F(z) = F(c) + \int_{[c,z]} f(\zeta)\,d\zeta \,, \quad z \in D(c,\delta) \subset D$$

και η συνέχεια ακριβώς όπως στην απόδειξη του Θεωρ. 1.

Άσκηση

Έστω $z \in \mathbb{C}$, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ κ.τμ. C^1 καμπύλη
Βρείτε τα ολοκλ. (α) $\int_\gamma (\zeta - z)^n d\zeta$, $n \in \mathbb{N}$

(β) Αν $\gamma([a,b]) \subset \mathbb{C} \setminus \{z\}$ και $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

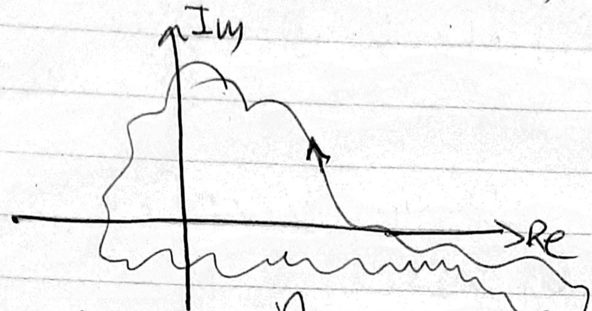
$$\int_\gamma \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^n}$$

γ) Αν $\gamma([a,b]) \subset z + \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ $\int_\gamma \frac{d\zeta}{(\zeta - z)} = ;$

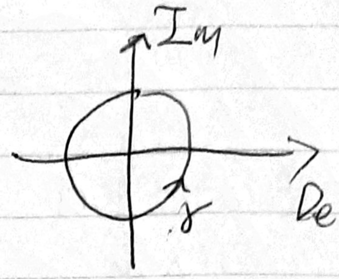
Δείκτης Στροφής

Παράδειγμα: Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ απλή, κλειστή κατά τμήματα C^1 που περιέχει το 0 στο εσωτερικό της

[Διευκόλυνση: π.χ. μπορούμε να σκεφτούμε την $\gamma(t) = r(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$



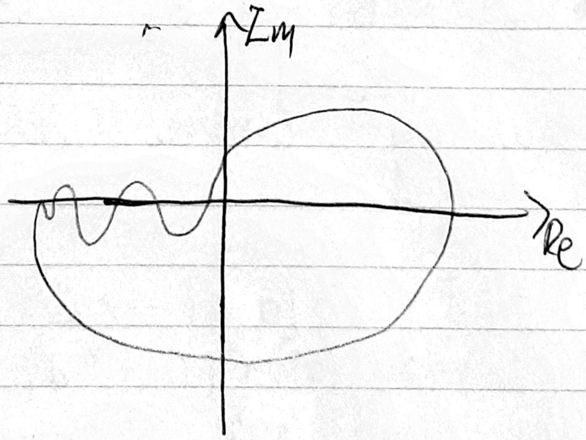
«διευκόλυνση»



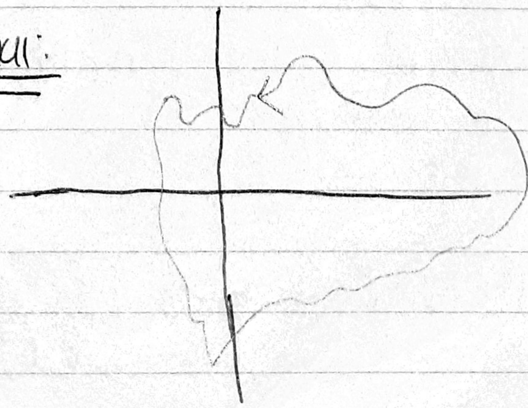
Αυτό το ονομάζουμε «η γ περιστρέφεται γύρω από το 0 μια φορά»

Έστω επίσης η γ είναι θετικά προσανατολισμένη και τέμνει τον ημιάξονα των αρνητικών πραγματικών $\mathbb{R}_-$ μόνο μια φορά.

ΑΠΑΓΟΡΕΥΕΤΑΙ:

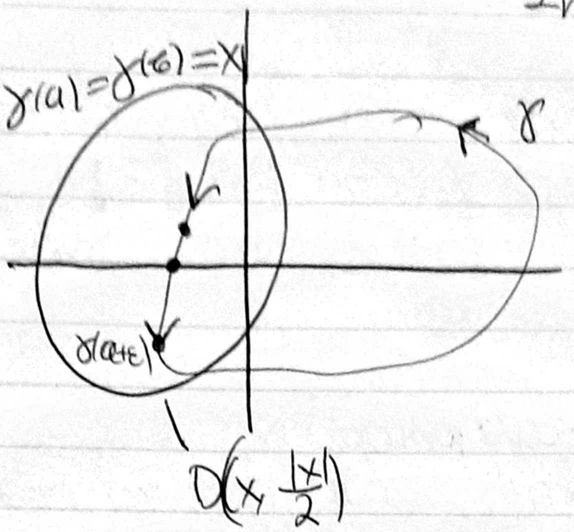


Επιτρέπεται:

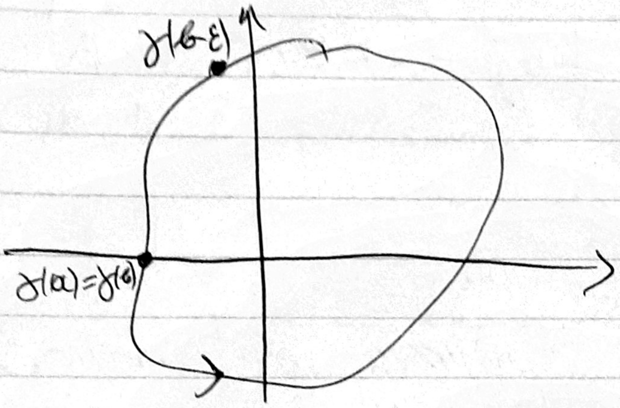


Θεωρούμε ότι αρχικό = τελικό σημείο είναι στον $\mathbb{R}^-$
δηλ. $\gamma(a)=\gamma(b)=x<0$

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon_0>0 : \forall \varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ $\gamma(a+\varepsilon), \gamma(b-\varepsilon)\in D(x,\frac{|x|}{2})$
$\operatorname{Im}\gamma(a+\varepsilon)\ ,\ \operatorname{Im}(b-\varepsilon)>0$



απλα « η γ ξεκινά από το $x\in\mathbb{R}^-$ πηγαίνει στο τρίτο τεταρτημόριο και ξαναέρχεται από το 2ο τεταρτημόριο »



Υπολογίζουμε το $\int_\gamma \frac{1}{\zeta}d\zeta =$

$$= \int_{\gamma|[a,a+\varepsilon]}\frac{1}{\zeta}d\zeta + \underbrace{\int_{\gamma|[a+\varepsilon,b-\varepsilon]}\frac{1}{\zeta}d\zeta}_{=\log\gamma(b-\varepsilon)-\log\gamma(a+\varepsilon)} + \int_{\gamma|[b-\varepsilon,b]}\frac{1}{\zeta}d\zeta$$

όπου σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα

$$\left|\int_{\gamma|[a,a+\varepsilon]}\frac{1}{\zeta}d\zeta\right| , \left|\int_{\gamma|[b-\varepsilon,b]}\frac{1}{\zeta}d\zeta\right| \underset{\text{Άσκηση}}{\le} 2\frac{\overset{=L(\gamma)}{\|\gamma'\|}}{|x|}\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to0]{} 0$$

Επιπλέον από τον ορισμό της λογαριθμικής έχουμε

$\log\gamma(b-\varepsilon)=\ln|\gamma(b-\varepsilon)|+i\operatorname{Arg}\gamma(b-\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}\ln|x|+i\pi$

$\log\gamma(a-\varepsilon)=\ln|\gamma(a+\varepsilon)|+i\operatorname{Arg}\gamma(a+\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}\ln|x|-i\pi$

$\Rightarrow \int_\gamma \frac{1}{\zeta}d\zeta = 2\pi i$

Άρα: Για μια κλειστή καμπύλη γ που διαπερνά μια φορά τον $\mathbb{R}^-$ «από πάνω προς τα κάτω» (και έχει στο εσωτερικό της το 0)

$$\int_\gamma \frac{1}{\zeta} d\zeta = 2\pi i$$ /π.χ για $\gamma(t) = re^{it}, t \in [0, 2\pi]$

Αν η καμπύλη περιστρέφεται n φορές, τότε

$$\int_\gamma \frac{1}{\zeta} d\zeta = \int_{\gamma_1} \frac{1}{\zeta} d\zeta + \dots + \int_{\gamma_n} \frac{1}{\zeta} d\zeta$$ (όπου κάθε γ_n περιστροφή μια φορά γύρω από 0)

$$= n 2\pi i$$

Αν αλλάξουμε προσανατολισμό (και περνάμε το $\mathbb{R}^-$ «από κάτω προς τα πάνω»)

π.χ. $\gamma(t) = re^{-it}, t \in [0, 2\pi]$ $$\int_\gamma \frac{1}{\zeta} d\zeta = -n 2\pi i, n \in \mathbb{N}$$

Θεώρημα / Ορισμός

Έστω $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ κατά τμήματα C^1 καμπύλη κλειστή. Τότε, ο δείκτης στροφής γύρω από το μηδέν της γ

$$S_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} \in \mathbb{Z} \quad (!)$$

Απόδ.

Έστω $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \dots \oplus \gamma_n$, γ_i C^1 για την διαμέριση $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$

και για $t \in [a, b]$ θεωρούμε την

$$\varphi(t) := \exp\left(\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} ds\right) = \exp\left(\sum_{j=1}^{i-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} ds + \int_{t_{i-1}}^{t} \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} ds\right)$$

$$\Rightarrow \varphi'(t) = \varphi(t)\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \Leftrightarrow \left(\frac{\varphi(t)}{\gamma(t)}\right)' = \frac{\varphi'(t)\gamma(t) - \varphi(t)\gamma'(t)}{\gamma^2(t)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(a)}{\gamma(a)} = \frac{\varphi(t_1)}{\gamma(t_1)} = \ldots = \frac{\varphi(t_n)}{\gamma(t_n)} = \frac{\varphi(b)}{\gamma(b)} \xRightarrow{\gamma(a)=\gamma(b)} \varphi(a) = \varphi(b) = 1$$

και αφού $e^z = 1 \Rightarrow \boxed{z = 2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}}$

$$\Rightarrow 1 = \varphi(b) = e^{\int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)}ds} \xRightarrow{\boxed{\text{Αφού}}} \underbrace{\int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)}ds}_{} = 2k\pi i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{\gamma_i'(s)}{\gamma_i(s)}ds =$$

$$= \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} \left(\overset{=}{\scriptstyle \pi\varepsilon C^1} \int_a^b \frac{1}{\gamma(t)}\gamma'(t)\,dt\right) \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = k \in \mathbb{Z}}$$

Το $k\in\mathbb{Z}$ υποδηλώνει πόσες φορές η γ «περιστρέφεται γύρω από το 0»

Ορισμός

Έστω $z\in\mathbb{C}$ και $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}\setminus\{z\}$ κλειστή κατά τμ C^1. Τότε ο
<u>ακέραιος αριθμός</u>

$$\delta_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} \in \mathbb{Z}$$

ονομάζεται δείκτης στροφής της γ γύρω από το z

Παρατήρηση Αν $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ κ.τμ C^1 κλειστή τότε ορίζεται η <u>συνάρτηση του δείκτη στροφής της γ</u>

$$\delta_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} \in \mathbb{Z}, \quad z\in\mathbb{C}\setminus\gamma([a,b])$$

και ισχύει το Θεώρημα

Θεώρημα Για μια τέτοια καμπύλη γ

η συνάρτηση δ. στρ. $\delta_\gamma : \mathbb{C} \setminus \gamma([a,b]) \to \mathbb{Z}$
είναι συνεχής, σταθερή σε κάθε συνεκτική συνιστώσα
του $\mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$ και ταυτοτικά ίσου μηδέν $(=0)$
στην μη-φραγμένη από αυτές